LATVIJAS BANKA

PROCENTU LIKMJU TERMIŅSTRUKTŪRAS FAKTORU MODELIS UN RISKA PRĒMIJAS NOVĒRTĒŠANA LATVIJAS NAUDAS TIRGŪ

PĒTĪJUMS
1 • 2006

VIKTORS AJEVSKIS
KRISTĪNE VĪTOLA

ISBN 9984–676–71–4

Pētījumā izteiktie secinājumi atspoguļo autoru – Latvijas Bankas Monetārās politikas pārvaldes darbinieku – viedokli, un autori uzņemas atbildību par iespējamām pieļautajām neprecizitātēm.

Dizainam izmantots Jutas Policjas un Mareka Gurecka gleznas "Gājiens baltajiem" (2005) fragments.

SATURS

SAĪSINĀJUMI

CB – centrālā banka
EONIA – eiro uz nakti izsniegto kredītu vidējais indekss *(Euro Overnight Index Average)*
IKP – iekšzemes kopprodukts
LIBOR – Londonas starpbanku kredītu procentu likmju indekss *(London Interbank Offered Rate)*
RIGIBID – Rīgas starpbanku noguldījumu procentu likmju indekss *(Riga Interbank Bid Rate)*
RIGIBOR – Rīgas starpbanku kredītu procentu likmju indekss *(Riga Interbank Offered Rate)*
SDR – Speciālās aizņēmuma tiesības *(Special Drawing Rights)*
VAR – vektoru autoregresija

IEVADS

Finanšu aktīvu cenās ietvertā informācija CB sniedz ziņas par tirgus dalībnieku tādu fundamentālo faktoru *(fundamentals)* gaidām kā nākotnes ekonomiskā aktivitāte, inflācija un īstermiņa procentu likmju dinamika. Gaidu analīze ir būtiska nākotnes politikas īstenošanā.

Piemēram, Eirosistēma galvenā mērķa – cenu stabilitātes – sasniegšanai īsteno monetārās politikas divu pīlāru stratēģiju. Finanšu aktīvu cenām tajā ir svarīga nozīme kā otrā pīlāra indikatoriem.(19)

Finanšu aktīvu cenas atspoguļo tirgus gaidas, jo finanšu aktīvu cenas būtībā orientētas uz nākotni. Pašreizējās aktīvu cenas tiek noteiktas, diskontējot gaidāmās nākotnes maksājumu plūsmas. Finanšu aktīvu novērtēšanai izmantoto diskonta likmi ietekmē divi faktori:
1) kompensācija par patēriņu, kas atlikts uz nākotni un netika patērēts aplūkojamā laika brīdī;
2) kompensācija par risku, kas saistīts ar nākotnes maksājumu plūsmas nenoteiktību.

Noteikta finanšu aktīva novērtēšanai investoram jāspēj prognozēt nākotnes maksājumu plūsmas un šīm plūsmām piemērojamās riska prēmiju saturošās diskonta likmes.

Fiksēta ienākuma finanšu instrumentu cenu nosaka procentu likmes, kas piemērojamas attiecīgo maksājumu plūsmu diskontēšanai. Procentu likmes savukārt nosaka gan tādu fundamentālo makroekonomisko mainīgo kā inflācijas un reālās procentu likmes prognozes, gan arī kompensācija par risku, kas saistīta ar šo prognožu nenoteiktību.

CB īpaši būtiska ar finanšu tirgus dalībnieku nākotnes procentu likmju gaidām saistītā informācija, kas palīdz tai prognozēt, vai noteikts politikas lēmums varētu pārsteigt tirgus dalībniekus un kāda varētu būtu viņu īstermiņa reakcija uz šo lēmumu. Oficiālo nākotnes procentu likmju līmeņa gaidām ir svarīga nozīme, arī nosakot pašreizējo monetārās politikas nostāju. Daudzus finanšu tirgus dalībniekus ietekmē ilgtermiņa procentu likmju pārmaiņas, kas galvenokārt atkarīgas no gaidāmajām oficiālajām nākotnes procentu likmēm. Tādējādi, lai novērtētu un kontrolētu pašreizējo monetāro apstākļu pārmaiņas, CB svarīgi zināt tirgus dalībnieku gaidāmo oficiālo nākotnes procentu likmju prognozes.

Nākotnes procentu likmes *(forward rate)* ir visbiežāk lietotais gaidāmo procentu likmju mērs. Tās ir nākotnes procentu likmes, ko implicēti ietver dažādu termiņu šodienas procentu likmes. Ja nebūtu nākotnes procentu likmju pārmaiņu nenoteiktības, nākotnes procentu likmes būtu vienādas ar gaidāmajām nākotnes procentu likmēm. Nākotnes procentu likmes, protams, nav droši zināmas. Uzņemoties šo procentu likmju risku, investori pieprasa riska prēmiju. Tādējādi līdzsvaru veidos nākotnes procentu likmes un gaidāmo īstermiņa procentu likmju starpība – riska prēmija. Turklāt, jo tālāka nākotne tiek aplūkota, jo lielāka ir procentu likmju iespējamās trajektorijas nenoteiktība, tāpēc šai riska prēmijai ar prognozes horizontu būtu jāpieaug. Tādējādi, jo tālāks laika horizonts, jo lielāka nākotnes procentu likmju un gaidāmo procentu likmju starpība.

Pētījumā riska prēmija definēta kā nākotnes procentu likmes un gaidāmās nākotnes procentu likmes starpība:

$$\mathrm{pr} = f - E_t i .$$

Lai iegūtu gaidāmās nākotnes procentu likmes novērtējumu, tika izmantota F. Dībolda *(F. Diebold)* un K. Li *(C. Li)* ieteiktā procedūra.(4) Autori pierādīja, ka samērā precīzu procentu likmju termiņstruktūras prognozi var iegūt, izmantojot autoregresīvos modeļus faktoriem, kas atbilst ienesīguma līknes līmenim, slīpumam un izliekumam. Pamatojoties uz F. Dībolda, G. Rūdebuša *(G. Rudebush)* un B. Arubas *(B. Aruoba)* (6) pieeju, pētījumā pieņemts, ka šie nenovērojamie faktori atbilst Nelsona–Zīgeļa *(Nelson–Siegel)* modeļa koeficientiem, kas šajā pētījumā novērtēti un prognozēti, lietojot Kalmana filtru *(Kalman filter)*.(13)

Pētījumā Kalmana filtrs izmantots, jo tam ir vairākas priekšrocības salīdzinājumā ar citām ekonometriskajām metodēm. Pašlaik Latvijas tautsaimniecībā noris pārejas procesi, tāpēc daudzi ekonomiskie mainīgie ir nestacionāri. Kalmana filtrs sniedz iespēju strādāt ar nestacionāriem mainīgajiem. Ekonomiskos mainīgos ietekmē investīciju un politiskais klimats, kā arī citi faktori, kas nav precīzi novērtējami. Turklāt Kalmana filtrs ļauj novērtēt ekonomiskos mainīgos un faktorus, kas laika gaitā mainās.

1. nodaļā definēti galvenie turpmākajai analīzei nepieciešamie teorētiskie jēdzieni, kā arī sniegts procentu likmju termiņstruktūras faktoru modeļu teorētiskais izklāsts. 2. nodaļā analizēts faktoru modeļa lietojums, izmantojot Latvijas datus. 2.1. sadaļā aplūkota izvēlēto datu izlase. 2.2. sadaļā analizēti vērtējumi, kas iegūti, izmantojot Kalmana filtru. 2.3. sadaļā sniegti novērtētās riska prēmijas rezultāti. 2.4. sadaļā skaidroti empīriskie rezultāti. Secinājumos apkopoti svarīgākie pētījuma rezultāti. 1. pielikumā sniegtas Kalmana filtra teorētiskās pamatnostādnes. 2.–5. pielikumā parādīta dažādu prognozes horizontu 1, 3, 6 un 12 mēnešu procentu likmes riska prēmijas dinamika, bet 6. pielikumā apkopotas 1, 3, 6 un 12 mēnešu procentu likmes vidējās prēmijas un standartnovirzes.

1. PROCENTU LIKMJU TERMIŅSTRUKTŪRAS FAKTORU MODEĻI

Nodaļas ievadā definēti un apzīmēti turpmāk aplūkotie teorētiskie pamatjēdzieni.

Ar $i(t,T)$ apzīmēta nominālo tagadnes darījumu procentu likme, t.i., bezkupona obligācijas, kas nopirkta periodā t ar dzēšanas datumu $T > t$, ienesīgums līdz dzēšanai. Pieņemot, ka nav arbitrāžas iespējas, var definēt sakarību nominālajai implicētajai nākotnes procentu likmei periodā t ar piegādi periodā τ un dzēšanu periodā T (17):

$$f(t,\tau,T) = \frac{i(t,T)\cdot\left(T-t\right)-i(t,\tau)\cdot(\tau-t)}{(T-\tau)\cdot\left(1+i(t,\tau)\cdot(\tau-t)\right)} \qquad [1.1].$$

Nākotnes procentu likmes prēmiju aprēķina kā nākotnes procentu likmes un gaidāmās nākotnes procentu likmes starpību:

$$\mathrm{pr}(t,\tau,T) = f(t,\tau,T) - E_t i(\tau,T) \qquad [1.2],$$

kur E_t ir periodā t pieejamās informācijas nosacītas matemātiskās cerības operators.

Ņemot vērā, ka nākotnes procentu likmi katrā periodā t var aprēķināt ar [1.1] vienādojumu, prēmijas noteikšanai jānovērtē $E_t i(\tau,T)$. Ja tiek izmantots piemērots modelis, šo lielumu var definēt kā attiecīgās procentu likmes modelētu prognozi. Dažādu laika horizontu $\tau - t$ un atšķirīgu termiņu procentu likmju $T - \tau$ prognozēm jābūt noteiktā veidā savstarpēji saistītām. Faktiski modelim jāietver visa procentu likmju termiņstruktūra.

Tā kā sistemātiskā riska avotu skaits ir ievērojami mazāks par tirgojamo instrumentu skaitu, tirgojamo procentu finanšu instrumentu cenām jābūt akumulētām vairākos mainīgajos jeb faktoros.(15; 16) Tādējādi procentu likmju termiņstruktūras faktoru modeļos tiek izmantotas struktūras, kurās ir neliels skaits procentu likmju faktoru un to faktoru slodžu, kas saista dažādu termiņu procentu likmes ar šiem faktoriem. Faktoru struktūras nodrošina gan lietderīgu informācijas saspiešanu, gan t.s. ekonomiskuma principu *(parsimony principle)*.

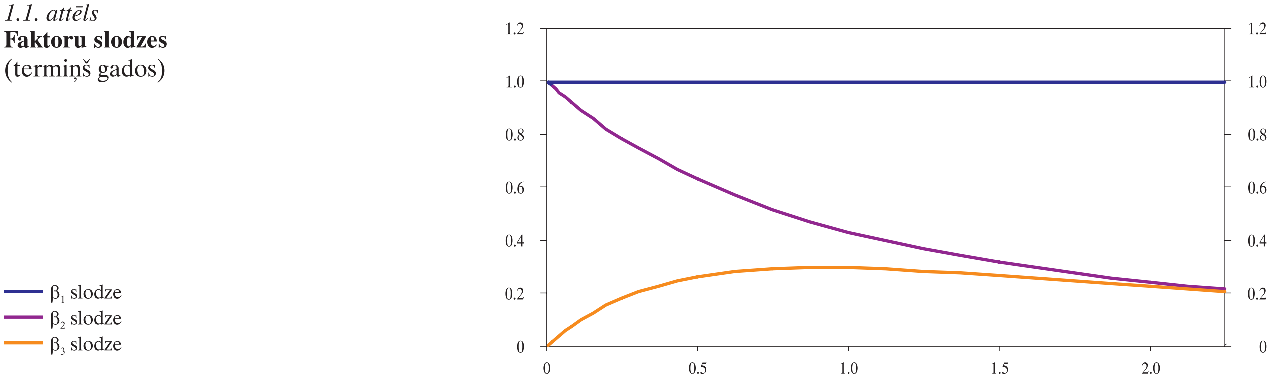
Literatūrā minētas vairākas pieejas procentu likmju faktoru un šo faktoru slodžu konstruēšanai. Piemēram, faktori var būt pirmās galvenās komponentes, kas saskaņā ar definīciju ir savstarpēji ortogonālas, savukārt slodzes ir relatīvi neierobežotas.(15; 16) Pirmās trīs komponentes parasti saistītas ar ienesīguma līknes līmeni *(level)*, slīpumu *(slope)* un izliekumu *(curvature)*. Otrā pieeja, ko bieži izmanto praktiķi un CB, ir Nelsona–Zīgeļa modelis (ieviests Č. Nelsona *(C. Nelson)* un E. Zīgeļa *(A. Siegel)* (17) darbā). Nelsona–Zīgeļa modelī faktoru slodzēm ir ekonomiski pamatoti ierobežojumi – nākotnes procentu likmes vienmēr ir pozitīvas un, pieaugot termiņam līdz dzēšanai, diskonta funkcija tiecas uz nulli. Trešā pieeja – bezarbitrāžas dinamiskais latento faktoru modelis. Latento faktoru modeļu vispārīgā apakšklase postulē latento faktoru lineāro jeb *affine* funkcionālo sakarību ar procentu likmēm un ierobežojumus to faktoru slodzēm, kuri izslēdz arbitrāžas stratēģijas, izmantojot dažādus procentu finanšu instrumentus.

Saskaņā ar faktoru modeļa pieeju liela dažādu termiņu ienesīgumu kopa tiek izteikta kā neliela skaita nenovērotu faktoru funkcija. Apzīmēsim ienesīgumu kopu ar $y(\tau)$, kur τ ir termiņš līdz dzēšanai. CB bieži lietota metode ienesīgumu šķērsgriezuma datu *(cross-section data)* attēlošanai ir Nelsona–Zīgeļa (17) līkne:

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_3\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \qquad [1.3],$$

kur β_1, β_2, β_3 un λ ir parametri. λ parametrs raksturo eksponenciālo locekļu samazināšanās ātrumu. Pētījumā tas pieņemts par konstanti, jo šāds pieņēmums ievērojami samazina β_{it} parametru vērtību svārstīgumu, padarot to uzvedību prognozējamāku. β_{1t}, β_{2t} un β_{3t} parametri interpretēti kā trīs latenti faktori.(6) β_{1t} faktora slodze vienāda ar *1*, t.i., ja $\tau \to \infty$, tā paliek nemainīga, tādējādi β_{1t} var uzskatīt par ilgtermiņa faktoru. β_{2t} faktora slodze ir $\frac{(1-e^{-\lambda\tau})}{\lambda\tau}$. Šī funkcija, kas vienāda ar *1*, ja $\tau = 0$ un monotoni samazinās līdz *0*, var tikt uzskatīta par īstermiņa faktoru. β_{3t} slodze $\frac{(1-e^{-\lambda\tau})}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}$ ir funkcija, kas vienāda ar *0*, ja $\tau = 0$ (t.i., nav īstermiņa faktors), tad tā pieaug, ja $\tau \approx \frac{1.8}{\lambda}$, sasniedz maksimumu, tālāk samazinās līdz *0* (t.i., nav ilgtermiņa faktors), un tādējādi to var uzskatīt par vidēja termiņa faktoru. 1.1. attēlā atspoguļotas šīs faktoru slodzes, pieņemot, ka $\lambda = 2$.

1.1. attēls
Faktoru slodzes
(termiņš gados)



Ilgtermiņa, īstermiņa un vidēja termiņa faktoru var attiecīgi interpretēt kā ienesīguma līknes līmeni, slīpumu un izliekumu. Piemēram, ilgtermiņa faktors β_{1t} raksturo ienesīguma līknes līmeni. Turklāt no [1.3] vienādojuma iegūst, ka $y(\infty) = \lim_{\tau\to\infty} y(\tau) = \beta_{1t}$. Arī β_{1t} pieaugums izraisa visu ienesīgumu $y(\tau)$ kāpumu par vienu un to pašu lielumu, vienlaikus palielinot ienesīguma līknes līmeni.

Vairāki autori, piemēram, Dž. A. Frenkels *(J. A. Frankel)* un K. Louna *(C. Lown)* (11), definē līknes slīpumu kā $y_t(\infty) - y_t(0)$, kas saskaņā ar [1.3] formulu ir β_{2t}. Tādējādi īstermiņa faktors β_{2t} nosaka ienesīguma līknes slīpumu. β_{2t} pieauguma dēļ īstermiņa procentu likmes palielinās straujāk nekā ilgtermiņa procentu likmes, jo slodze $\frac{(1-e^{-\lambda_t\tau})}{\lambda\tau}$, kas tiek reizināta ar β_{2t}, ja ir mazas τ vērtības, ir tuvu *1*, bet, ja tās ir lielas, – tuvu *0*, kas savukārt izraisa ienesīguma līknes slīpuma pārmaiņas.

Turpretī faktora β_{3t} kāpums maz ietekmēs īstermiņa un ilgtermiņa procentu likmju pieaugumu, jo faktora slodze $\frac{(1-e^{-\lambda_t\tau})}{\lambda\tau}-e^{-\lambda_t\tau}$ ar lielām un mazām τ vērtībām būs tuvu *0*, bet vairāk ietekmēs vidēja termiņa procentu likmju kāpumu (maksimāli pieaugs procentu likme, kas atbilst termiņam $\tau\approx\frac{1.8}{\lambda}$), tādējādi palielinot ienesīguma līknes izliekumu.

Turklāt, kā pierādīja F. Dībolds un K. Li (4), Nelsona–Zīgeļa līkni var atspoguļot kā dinamisku latentu faktoru modeli, kurā β_1, β_2 un β_3 ir laikā mainīgi līmeņa, slīpuma un izliekuma faktori un locekļi, kas reizināti ar šiem faktoriem, ir faktoru slodzes. Tādējādi modeli var definēt šādi:

$$y_t(\tau)=L_t+S_t\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right)+C_t\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}-e^{-\lambda\tau}\right) \qquad [1.4],$$

kur L_t, S_t un C_t ir laikā mainīgie β_1, β_2 un β_3. Šī interpretācija turpmāk tiks ilustrēta ar empīriskiem vērtējumiem.

Ja L_t, S_t un C_t dinamika pakļaujas pirmās kārtas vektora autoregresīvajam procesam, šāds modelis veido stāvokļu telpas *(state-space)* sistēmu. Pārejas vienādojums, kas nosaka stāvokļa vektora dinamiku, ir šāds:

$$\begin{pmatrix}L_t\\S_t\\C_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_L\\\mu_S\\\mu_C\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_{t-1}\\S_{t-1}\\C_{t-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\eta_t(L)\\\eta_t(S)\\\eta_t(C)\end{pmatrix} \qquad [1.5],$$

kur t = 1, …, T ir izlases laikrindas garums. Vienādojums, kas saista N ienesīgumu kopu ar trijiem nenovērojamiem faktoriem, ir šāds:

$$\begin{pmatrix}y_t(\tau_1)\\y_t(\tau_2)\\\vdots\\y_t(\tau_N)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1-e^{-\tau_1\lambda}}{\tau_1\lambda}&\frac{1-e^{-\tau_1\lambda}}{\tau_1\lambda}-e^{-\tau_1\lambda}\\1&\frac{1-e^{-\tau_2\lambda}}{\tau_2\lambda}&\frac{1-e^{-\tau_2\lambda}}{\tau_2\lambda}-e^{-\tau_2\lambda}\\\vdots&\vdots&\vdots\\1&\frac{1-e^{-\tau_N\lambda}}{\tau_N\lambda}&\frac{1-e^{-\tau_N\lambda}}{\tau_N\lambda}-e^{-\tau_N\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_t\\S_t\\C_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_t(\tau_1)\\\varepsilon_t(\tau_2)\\\vdots\\\varepsilon_t(\tau_N)\end{pmatrix} \qquad [1.6].$$

Izmantojot vispārpieņemtos vektora un matricas apzīmējumus, šo stāvokļu telpas sistēmu var izteikt kā:

$$\alpha_t=\mu+A\alpha_{t-1}+\eta_t \qquad [1.7],$$

$$y_t=\Lambda\alpha_t+\varepsilon_t \qquad [1.8],$$

kur vektors $\alpha_t=(L_t,S_t,C_t)'$.

Lai īstenotos Kalmana filtra lineāro mazāko kvadrātu optimalitāte, tiek pieņemts tāds nosacījums, lai baltā trokšņa pāreja un mērījumu kļūdas būtu ortogonālas gan savstarpēji, gan attiecībā pret sākumstāvokli:

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim WN \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \right] \qquad [1.9],$$

$$E(\alpha_0 \eta_t^{'}) = 0 \qquad [1.10],$$

$$E(\alpha_0 \varepsilon_t^{'}) = 0 \qquad [1.11].$$

Analīzē galvenokārt tiek pieņemts, ka *H* un *Q* matricas ir diagonālas. Pieņēmums par diagonālu *Q* matricu, kas nozīmē, ka dažādu termiņu ienesīguma novirzes no ienesīguma līknes ir savstarpēji nekorelētas, ir visai parasts. Lai gan F. Dībolds, G. Rūdebušs un B. Aruba savā darbā nenoteica ierobežojumu *H* matricai, viņu vērtējumos nediagonālie matricas locekļi izrādījās nenozīmīgi.(6) Tādējādi aprēķinu vienkāršošanai pētījumā aplūkots tikai diagonālās *H* matricas veids.

Kopumā stāvokļu telpas pieeja nodrošina efektīvu dinamisko modeļu analīzes un novērtēšanas struktūru. Atziņa, ka Nelsona–Zīgeļa modelis ir vienkārši pārveidojams stāvokļu telpas modelī, ir sevišķi noderīga, jo šajā gadījumā Kalmana filtrs dod maksimālās ticamības vērtējumus, kā arī optimāli filtrētus un izlīdzinātus *(smoothed)* modeļa faktoru vērtējumus. Turklāt šajā pētījumā priekšroka dota viena soļa Kalmana filtra metodei salīdzinājumā ar divu soļu Dībolda–Li metodi, jo visu parametru vienlaicīga novērtēšana sniedz pareizus atzinumus saskaņā ar standarta teoriju. Turpretī divu soļu procedūras trūkums – pirmajā solī iegūto parametru vērtējumu un iegūto signālu nenoteiktība otrajā solī netiek ņemta vērā. Visbeidzot, stāvokļu telpas pieeja sniedz iespēju tālākiem paplašinājumiem, piemēram, heteroskedasticitātes esamībai, datu trūkumam u.c., lai gan pētījumā līdzīgi paplašinājumi netiek aplūkoti.

Lietderīgi salīdzināt pētījumā izmantoto pieeju ar citu autoru piedāvātajām pieejām. Ļoti vispārīgs (lineārs) ienesīguma modelis ir neierobežotā VAR, kuru novērtē ienesīgumu kopai. Viens no potenciālajiem šā modeļa trūkumiem ir rezultātu iespējama atkarība no izvēlētās ienesīgumu kopas. Minētais faktoru attēlojums var apkopot informāciju no lielas ienesīgumu kopas. Viens no vienkāršākajiem faktoru modeļiem ir VAR, kas novērtēta ar galvenajām komponentēm[1], kuras izveidotas no lielas ienesīgumu kopas. Šāda pieeja rada faktoriem ierobežojumu būt savstarpēji ortogonāliem, taču pilnībā neierobežo faktoru slodzes. Turpretī šis modelis potenciāli pieļauj faktoru korelāciju, bet ierobežo faktoru slodzes ar pieļaujamo ienesīgumu līkņu ierobežojumiem. Piemēram, Nelsona–Zīgeļa modelis garantē pozitīvas nākotnes procentu likmes visos laika periodos un, pagarinoties termiņam, uz *0* konverģējošu diskonta funkciju. Šādi ekonomiski pamatoti ierobežojumi, visticamāk, palīdz ienesīguma līknes dinamikas analīzē. Ir iespēja noteikt arī alternatīvus ierobežojumus. Populārākais ir bezarbitrāžas ierobežojums, kas palielina ienesīguma līknes procentu likmju pārmaiņu konsistenci laika gaitā. Tomēr liecības par to, cik lielā mērā šie ierobežojumi uzlabo rezultātus, ir visai atšķirīgas.[2]

[1] Par VAR termiņstruktūras analīzi sk. Č. Evansa *(C. Evans)* un D. Maršala *(D. Marshall)* (9; 10) darbus.

[2] Salīdzinājumam var minēt, piemēram, E. Anga *(A. Ang)* un M. Pjacezi *(M. Piazessi)* (1) un G. Dafī *(G. Duffee)* (7) darbus.

2. EMPĪRISKIE REZULTĀTI

2.1. Dati

Pētījuma modeļa novērtēšanai izmantoti 1, 3, 6, 9 un 12 mēnešu indeksu RIGIBID un RIGIBOR vidējie aritmētiskie lielumi. Netiek analizētas īsāku termiņu procentu likmes, jo obligāto rezervju prasību izpildes perioda beigās to svārstības (īpaši likmēm uz nakti) ir ļoti lielas. Izmantoti mēnešu dati periodā no 2000. gada maija līdz 2005. gada jūlijam.[3] Procentu likmes aprēķinātas kā dienu vidējās aritmētiskās procentu likmes attiecīgajā mēnesī.

2.2. Modeļa novērtēšana

Pētījuma modelis izveido stāvokļu telpas sistēmu, kurā VAR(1) pārejas vienādojums raksturo latento stāvokļa mainīgo vektora dinamiku, bet lineārais vienādojums saista novērotos ienesīgumus ar stāvokļa vektoru. Šajā pētījumā atšķirībā no F. Dībolda, G. Rūdebuša un B. Arubas (6) darba izmantotas neatkarīgas autoregresīvas pirmās kārtas specifikācijas katram stāvokļa mainīgajam, t.i., visi A matricas nediagonālie elementi vienādi ar 0. Šāda pieeja sniedz iespēju ievērojami samazināt novērtējamo koeficientu skaitu, ņemot vērā ne pārāk garo laikrindu nosacījumu. F. Dībolda, G. Rūdebuša un B. Arubas darbā visi ārpus diagonāles esošie koeficienti ir nenozīmīgi, tāpēc attaisnojama šā pētījuma autoru specifikācijas izvēle. F. Dībolda un K. Li (4) darbā aplūkota L_t, C_t un S_t autoregresīvā specifikācija, taču autori koeficientus novērtēja ar divu soļu metodes palīdzību, nevis izmantojot Kalmana filtru (kas lietots šajā pētījumā, jo tam ir zināmas priekšrocības).

Modelī jānovērtē vairāki parametri. (3 x 3) dimensiju pārejas diagonālajā matricā A ietilpst trīs brīvie parametri, (3 x 1) dimensiju konstantu vektorā μ ir trīs brīvie parametri, un mērīšanas matricu Λ veido viens brīvais parametrs λ. Turklāt pārejas un kļūdu kovariācijas matricā Q ietilpst trīs brīvie parametri (pa vienai kļūdas dispersijai katram no trijiem latentajiem līmeņa, slīpuma un izliekuma faktoriem), bet mērīšanas kļūdu kovariācijas matricā H ir pieci brīvie parametri (pa vienai kļūdas dispersijai katram no pieciem ienesīgumiem). Tādējādi kopumā, izmantojot optimizācijas metodi, jānovērtē 15 parametri, kas ir sarežģīts skaitlisks uzdevums.

Lai aprēķinātu optimālās ienesīgumu prognozes un attiecīgās prognožu kļūdas, šai parametru konfigurācijai tika izmantots Kalmana filtrs, un tad tika novērtēta Gausa varbūtības funkcija modelim, izmantojot varbūtības prognozes kļūdas dekompozīciju. Kalmana filtra teorētiskais pamatojums detalizēti aplūkots 1. pielikumā. Kalmana filtra inicializēšanai izmantotas stāvokļa mainīgo vērtības, lietojot mazāko kvadrātu metodi un šķērsgriezuma datus laika momentā $t = 1$ (pirmais novērojums laikrindā).

2.2.1. tabulā atspoguļoti novērtētā modeļa rezultāti. Autoregresīvie koeficienti L_t, C_t un S_t norāda uz dinamikas augstu persistenci (attiecīgi 0.99, 0.88 un 0.85). Iegūtās vērtības ir ļoti tuvas F. Dībolda, G. Rūdebuša un B. Arubas darbā norādītajām (koeficienti ir attiecīgi 0.99, 0.94 un 0.84). Tāpat kā minēto autoru pētījumā, pārejot no L_t uz S_t un tālāk uz C_t, pārejas šoka svārstīgums pieaug. Visas konstantes ir nenozīmīgas, tomēr šā pētījuma specifikācijā tās atstātas, jo citādi iespējami nestabili vērtējumi.

[3] Ar 2000. gada maiju Latvijas Banka sāka aprēķināt 9 (iekšējai lietošanai) un 12 mēnešu indeksus RIGIBID un RIGIBOR, tāpēc, lai izveidotu lielāku izlasi, izvēlēts periods, sākot ar 2000. gada maiju.

2.2.1. tabula
Modeļa parametru novērtējumi

L	S	C	μ_L	μ_S	μ_C	σ_L	σ_S	σ_C
0.994	0.890	0.850	–0.054	–0.078	–0.002	0.011	0.132	0.271
(0.013)	(0.046)	(0.098)	(0.087)	(0.091)	(0.121)	(0.015)	(0.021)	(0.077)

Piezīme. Koeficientu standartkļūdas norādītas iekavās.

2.3. Riska prēmija

Pētījumā riska prēmija definēta kā nākotnes procentu likmes f un attiecīgā termiņa gaidāmās nākotnes procentu likmes $E_t i(\tau, T)$ starpība:

$$\mathrm{pr}\,(t,\tau,T) = f\,(t,\tau,T) - E_t i(\tau,T),$$

kur $E_t i(\tau, T)$ aprēķina šādi:

$$E_t i(\tau,T) = L_{\tau|t} + S_{\tau|t}\left(\frac{1-e^{-\lambda(T-\tau)}}{\lambda(T-\tau)}\right) + C_{\tau|t}\left(\frac{1-e^{-\lambda(T-\tau)}}{\lambda(T-\tau)} - e^{-\lambda(T-\tau)}\right),$$

kur $(L_{\tau|t}, S_{\tau|t}, C_{\tau|t}) = \alpha'_{\tau|t} \equiv E_t(\alpha'_\tau)$ ir stāvokļu mainīgo prognoze $(\tau - t)$ soļus uz priekšu ar nosacījumu, ka $\alpha_{t|t}$ sākuma vērtība ir stāvokļu mainīgo periodā t filtrētās vērtības.

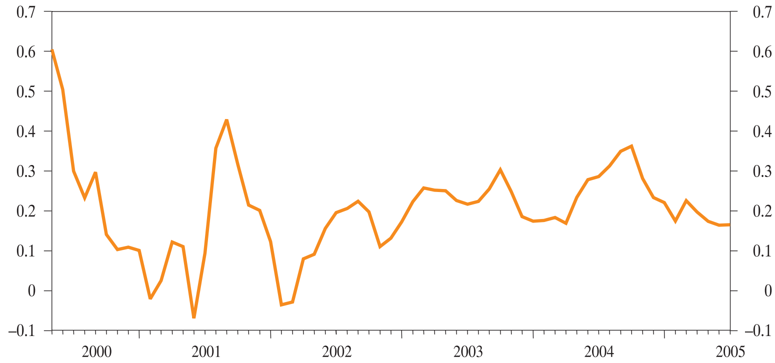
Nākotnes procentu likmju aprēķinos izmantotas arī stāvokļu mainīgo filtrētās vērtības:

$$f\,(t,\tau,T) = \frac{i^*(t,T)\cdot(T-t) - i^*(t,\tau)\cdot(\tau-t)}{(T-\tau)\cdot\left(1+i^*(t,\tau)\cdot(\tau-t)\right)},$$

kur $i^*(t,\tau) = L_{t|t} + S_{t|t}\left(\frac{1-e^{-\lambda(\tau-t)}}{\lambda(\tau-t)}\right) + C_{t|t}\left(\frac{1-e^{-\lambda(\tau-t)}}{\lambda(\tau-t)} - e^{-\lambda(\tau-t)}\right)$ ir procentu likmju teorētiskā vērtība, kas atbilst Nelsona–Zīgeļa modelim periodā t.

2.3.1. attēls atspoguļo viena mēneša prognozes horizonta mēneša procentu likmes riska prēmiju – pr(t, 1,2). Jāatzīmē, ka pētījumā definētā riska prēmija ir pareiza, ja ir pareizs novērtēto gaidu mērs kā prognoze, kas iegūta, izmantojot Kalmana filtru. 2.3.1. attēlā redzams, ka līdz 2002. gadam riska prēmijas svārstības bija būtiskas, tad tā stabilizējās, un turpmāk vērojama tās samazināšanās no 36 bāzes punktiem 2004. gada oktobrī līdz 16 bāzes punktiem 2005. gada jūlijā. Riska prēmijas samazināšanās 2004. gada beigās saistīta ar tirgus dalībnieku lata piesaistes maiņas no SDR valūtu groza uz eiro gaidām, kas nozīmē zemāku valūtas risku. Arī 2005. gada sākumā riska prēmija joprojām samazinājās, kas, iespējams, saistīts ar konverģences procesu. 2. pielikumā atspoguļota mēneša procentu likmes riska prēmijas dinamika 2–12 mēnešu prognozes horizontam. Visā aplūkojamā periodā vidēji prēmija ir pozitīva, lai gan atsevišķos laika periodos tā ir negatīva. Tas var liecināt, ka eksistē vairākas gaidu kļūdas. Par četriem mēnešiem ilgāku prognozes horizontu prēmijām ir tikai pozitīvas vērtības. 3., 4. un 5. pielikuma attēlos redzams, ka līdzīga ir 3, 6 un 12 mēnešu procentu likmju prēmiju dinamika.

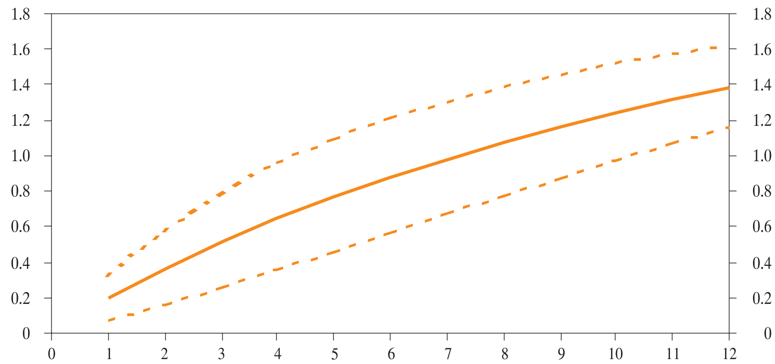
2.3.1. attēls
1 mēneša prognozes horizonta 1 mēneša procentu likmes riska prēmijas dinamika
(%)



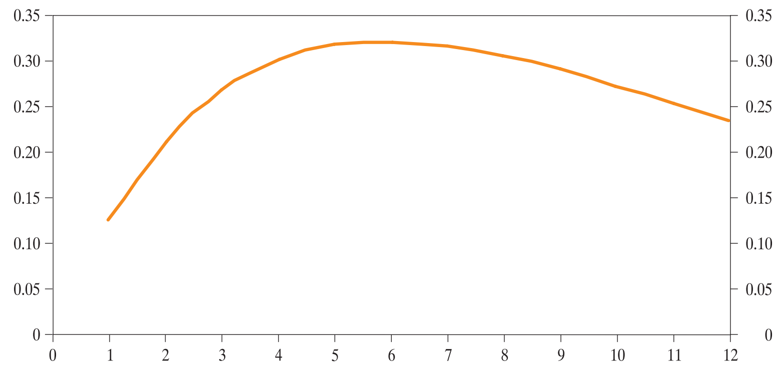
Lai novērtētu vidējo prēmiju aplūkojamā periodā, pētījumā aprēķināta vidējā aritmētiskā perioda prēmija un tās 1, 3, 6 un 12 mēnešu procentu likmes standartnovirze.

2.3.2. un 2.3.3. attēlā atspoguļotas 1 mēneša procentu likmes vidējās riska prēmijas un standartnovirzes prognozes horizontam no 1 līdz 12 mēnešiem. Saskaņā ar prognozi prēmijas ir pozitīvas un pieaug līdz ar prognozes horizontu. Jo tālāks horizonts, jo lielāku prēmiju pieprasa tirgus dalībnieki. Turpretī standartkļūdas pieaug līdz 6 mēnešu horizontam un tad vienmērīgi samazinās. 6. pielikuma tabulās atspoguļotas 3, 6 un 12 mēnešu procentu likmju vidējās riska prēmijas un standartnovirzes. Aplūkojot 6. pielikuma datus, var secināt, ka 3, 6 un 12 mēnešu procentu likmju prēmijas un standartnovirzes dinamika ir līdzīga 1 mēneša procentu likmes dinamikai.

2.3.2. attēls
Dažādu prognozes horizontu 1 mēneša procentu likmes vidējā perioda riska prēmija
(riska prēmija intervālā ± viena standartnovirze ar 1–12 mēnešu prognozes horizontu; mēnešos; %)

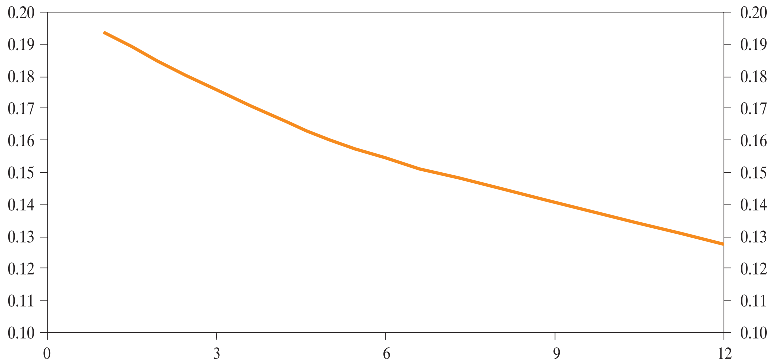


2.3.3. attēls
Dažādu prognozes horizontu 1 mēneša procentu likmes vidējā perioda standartnovirze
(mēnešos; %)



Īpatnēja tendence vērojama prēmijām ar vienādu prognozes horizontu, bet atšķirīgu termiņu. Pieaugot procentu likmes termiņam, riska prēmija samazinās. 2.3.4. attēlā atspoguļota 1 mēneša prognozes horizonta riska prēmijas t.s. uzvedība *(behaviour)* 1, 3, 6 un 12 mēnešu termiņam. Attēlā redzams, ka ilgākā termiņā riska prēmija samazinās. Līdzīga sakarība vērojama arī 2–12 mēnešu prognozes horizontam. Šāda riska prēmijas uzvedība teorētiski skaidrota aplūkotā modeļa ietvaros 2.4. sadaļā.

2.3.4. attēls
1 mēneša prognozes horizonta 1, 3, 6 un 12 mēnešu procentu likmes riska prēmija
(mēnešos; %)



2.3.1. tabulā salīdzinātas Latvijas procentu likmju riska prēmijas ar citu valstu procentu likmju riska prēmijām, kas vērtētas atšķirīgos pētījumos. Analizējot šos datus, var secināt, ka pašlaik Latvijas procentu likmju riska prēmijas ir augstākas nekā attīstīto valstu prēmijas. Konverģences procesā gaidāma latu procentu likmju riska prēmiju tuvināšanās eiro zonas procentu likmju riska prēmiju līmenim.

2.3.1. tabula
Latvijas un citu valstu riska prēmijas
(dažādu prognozes horizontu 1 mēneša procentu likmes riska prēmija; bāzes punktos)

	1 mēnesis	3 mēneši	6 mēneši	9 mēneši
Latvijā[1]	19	52	88	116
1 mēneša LIBOR Vācijā (1989. gada decembris–1998. gada decembris)[2]	5	10	15	27
EONIA mijmaiņas darījumiem				
1999. gada janvāris–2001. gada septembris[2]	0	2	6	10
1999. gada janvāris–2002. gada jūnijs[2]	1	2	4	13
Vācijā (1972–1998)[3]	0–5	5–10	20–25	25–35
Kanādā (1988–1998)[4]	6	29	58	100

[1] Šā pētījuma rezultāti.
[2] (8).
[3] (2).
[4] (12).

2.4. Riska prēmijas uzvedības skaidrojums

Šajā sadaļā pētījuma modeļa ietvaros teorētiski skaidrota riska prēmijas empīriskā uzvedība, kas aplūkota iepriekšējā sadaļā.

Saskaņā ar [1.2] vienādojumu:

$$\mathrm{pr}(t,\tau,T) = f(t,\tau,T) - E_t i(\tau,T) \qquad [2.1].$$

[1.1] vienādojuma vietā nākotnes procentu likme tiks definēta kā:

$$f(t,\tau,T) = \frac{i(t,T)\cdot(T-t) - i(t,\tau)\cdot(\tau-t)}{(T-\tau)} \qquad [2.2],$$

kas atbilst nepārtrauktai saliktai procentu likmei.

Ievietojot [2.2] vienādojumā $i(t,\ \tau)$ un $i(t,\ T)$ vietā izteiksmes no [1.4] vienādojuma, iegūst:

$$f(t,\tau,T) = L_t + S_t \frac{e^{-\lambda(\tau-t)} - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-\tau)} + C_t\left[\frac{e^{-\lambda(\tau-t)} - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-\tau)} + (\tau-t)e^{-\lambda(\tau-t)} - (T-t)e^{-\lambda(T-t)}\right] \qquad [2.3].$$

[1.4] vienādojuma procentu likmes prognoze ir:

$$E_t i(\tau,T) = E_t(L_\tau) + \frac{1-e^{-\lambda(T-\tau)}}{\lambda(T-\tau)} E_t(S_\tau) + \left(\frac{1-e^{-\lambda(T-\tau)}}{\lambda(T-\tau)} - e^{-\lambda(T-\tau)}\right) E_t(C_\tau) \qquad [2.4],$$

kur $E_t(L_\tau)$, $E_t(S_\tau)$ un $E_t(C_\tau)$ ir attiecīgo faktoru prognozes periodā t nākotnes periodam τ.

Ņemot vērā, ka faktoru dinamika pakļaujas pirmās kārtas autoregresīvajam procesam, iegūst šādus vienādojumus faktoru prognozei:

$$E_t(L_\tau) = a_{11}^{\tau-t} L_t + \mu_L\left(1 + a_{11} + \ldots + a_{11}^{\tau-t-1}\right) = a_{11}^{\tau-t} L_t + \mu_L \frac{1-a_{11}^{\tau-t}}{1-a_{11}} \qquad [2.5],$$

$$E_t(S_\tau) = a_{22}^{\tau-t} S_t + \mu_S\left(1 + a_{22} + \ldots + a_{22}^{\tau-t-1}\right) = a_{22}^{\tau-t} S_t + \mu_S \frac{1-a_{22}^{\tau-t}}{1-a_{22}} \qquad [2.6],$$

$$E_t(S_\tau) = a_{33}^{\tau-t} C_t + \mu_C \frac{1-a_{33}^{\tau-t}}{1-a_{33}} \qquad [2.7].$$

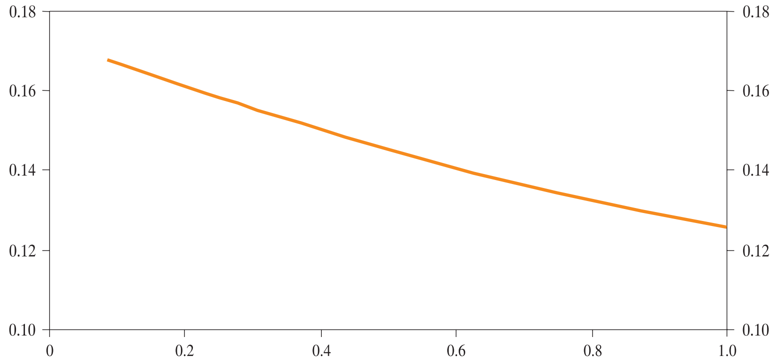
No [2.1] un [2.3]–[2.7] vienādojuma iegūst šādu riska prēmijas vienādojumu:

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}(t,\tau,T) &= f(t,\tau,T) - E_t i(\tau,T) = L_t + S_t \frac{e^{-\lambda(\tau-t)} - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-\tau)} + \\ &+ C_t\left[\frac{e^{-\lambda(\tau-t)} - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-\tau)} + (\tau-t)e^{-\lambda(\tau-t)} - (T-t)e^{-\lambda(T-t)}\right] - a_{11}^{\tau-t} L_t - \mu_L \frac{1-a_{11}^{\tau-t}}{1-a_{11}} - \\ &- \left(\frac{1-e^{-\lambda(T-\tau)}}{\lambda(T-\tau)}\right)\left(a_{22}^{\tau-t} S_t + \mu_S \frac{1-a_{22}^{\tau-t}}{1-a_{22}}\right) - \left(\frac{1-e^{-\lambda(T-\tau)}}{\lambda(T-\tau)} - e^{-\lambda(T-\tau)}\right)\left(a_{33}^{\tau-t} C_t + \mu_C \frac{1-a_{33}^{\tau-t}}{1-a_{33}}\right)\end{aligned} \qquad [2.8].$$

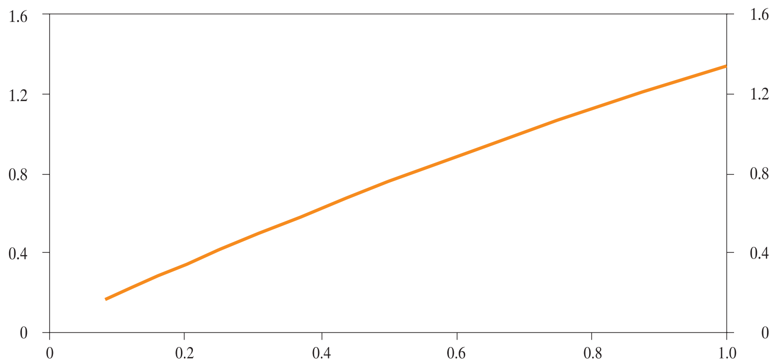
2.4.1. attēlā atspoguļota [2.8] vienādojuma riska prēmija kā funkcija no procentu likmes termiņa (T – t) ar prognozes horizontu $\tau - t = 1$ mēnesis. Šīs riska prēmijas faktoru vērtības $L_t = 2.756$, $S_t = -0.482$ un $C_t = 0.048$ un koeficienti a_{ii} un μ_j atbilst Kalmana filtra 2005. gada jūlija (t.i., pēdējā izlases novērojuma) vērtējumiem. Attēlā redzams, ka ar šīm parametru vērtībām, pieaugot $T - t$, funkcija ir dilstoša, kas pamato iepriekšējā sadaļā minētos empīriskos faktus.

Ja [2.8] vienādojumā ar šīm parametru vērtībām fiksē procentu likmes termiņu $T - \tau =$ $= 1$ mēnesis un maina prognozes horizontu, iegūst 2.4.2. attēlā atspoguļoto riska prēmijas līkni atbilstoši prognozes horizontam. Attēlā redzams, ka, palielinoties prognozes horizontam, riska prēmija pieaug. Tas apstiprina 2.3. sadaļas empīriskos faktus un heiristiskos apsvērumus, ka investori pieprasa augstāku riska prēmiju par lielāku nenoteiktību, kas saistīta ar investīcijām tālākam laika horizontam.

2.4.1. attēls
1 mēneša prognozes horizonta teorētiskā procentu likmes riska prēmija
(riska prēmija kā funkcija no procentu likmes termiņa; gados; %)



2.4.2. attēls
Dažādu prognozes horizontu teorētiskā 1 mēneša procentu likmes riska prēmija
(riska prēmija kā funkcija no prognozes horizonta; gados; %)



SECINĀJUMI

Pētījuma mērķis ir Latvijas naudas tirgus procentu likmju termiņstruktūrā ietvertās riska prēmijas analīze. Riska prēmija definēta kā nākotnes procentu likmes un attiecīgā termiņa gaidāmās nākotnes procentu likmes starpība. Procentu likmju termiņstruktūra raksturota saskaņā ar Nelsona–Zīgeļa modeli.

Ņemot vērā F. Dībolda, G. Rūdebuša un B. Arubas pieeju, pieņemts, ka Nelsona–Zīgeļa modeļa koeficienti nav novērojami, tāpēc pētījuma modelis analizēts, izmantojot Kalmana filtru.

Par novērotajiem mainīgajiem izmantotas Latvijas naudas tirgus RIGIBID un RIGIBOR procentu likmes.

Gaidāmā nākotnes procentu likme aprēķināta kā Kalmana filtra prognoze *n* periodus uz priekšu.

Riska prēmijas uzvedība iegūta dažādu termiņu un atšķirīgu prognozes horizontu procentu likmēm periodā no 2000. gada maija līdz 2005. gada jūlijam. Rezultāti liecina, ka riska prēmija bija nozīmīga pēc lieluma un periodā no 2000. gada līdz 2002. gadam tās svārstības bija būtiskas. Pēc 2002. gada riska prēmijas uzvedība stabilizējās, un pēc 2004. gada novērojama riska prēmijas samazināšanās tendence.

Tāpēc var secināt, ka riska prēmija palielinās, pieaugot prognozes horizontam, un samazinās, pieaugot procentu likmes termiņam. Pētījumā sniegts šo faktu teorētiskais pamatojums, kas balstās uz modeļa matemātisko struktūru.

Lielākās grūtības riska prēmijas izvērtēšanā sagādā finanšu tirgus datos iekļauto dalībnieku gaidu analīze. Pētījumā veiktā riska prēmijas uzvedības analīze piedāvā papildu instrumentus, kas CB palīdz laikus atklāt finanšu tirgus dalībnieku nākotnes procentu likmju gaidas un noskaidrot uzticēšanos monetārajai politikai. Tomēr analīzē izmantotie naudas tirgus instrumenti RIGIBID un RIGIBOR ierobežo prognozēšanas horizontu līdz 1 gadam.

Lai palielinātu prognozes horizontu, kā arī veicinātu riska prēmijas novērtējuma precizitāti, turpmākajā pētījumā modelī paredzēts iekļaut datus par obligāciju tirgu, kas vairāk atspoguļo konverģences procesu (eiro procentu likmēm). Kalmana filtra lietojumam šajā situācijā ir īpašas priekšrocības, jo Latvijas valdības obligāciju tirgum raksturīgi reti darījumi un nesistemātiska kotēšana.(3) Turklāt obligāciju tirgus dati ir nestacionāri. Vēl viena Kalmana filtra priekšrocība – tas implicētā veidā sniedz iespēju ņemt vērā tādus nenovērojamus faktorus kā investīciju un politiskais klimats, kurus nav iespējams korekti kvantitatīvi aprakstīt.

Cits iespējamais pētījumu virziens saistīts ar makroekonomisko mainīgo – inflācijas, IKP u.c. (6) – iekļaušanu modelī. Tas sniegtu atbildes uz jautājumiem, vai procentu likmju termiņstruktūra ietver informāciju, kas ļautu prognozēt makroekonomiskos mainīgos, un otrādi – vai makroekonomiskie mainīgie ļauj uzlabot procentu likmju prognozi. Ar šādu modeli iegūtos riska prēmijas uzvedības rezultātus būs iespējams salīdzināt ar šajā pētījumā izmantoto faktoru modeļu rezultātiem un novērtēt aprēķinātās riska prēmijas precizitāti.

PIELIKUMI

1. pielikums
Detalizēts Kalmana filtra metodoloģijas izklāsts

P.1. Nosacītas matemātiskās cerības īpašības

Ar x un y apzīmē gadījuma vektorus, kuru kopējam sadalījumam ir pirmais un otrais moments. Otros momentus definē šādi:

$$\begin{cases} D(x) = E(x \cdot x') - E(x) \cdot E(x') \\ D(y) = E(y \cdot y') - E(y) \cdot E(y') \\ C(y,x) = E(y \cdot x') - E(y) \cdot E(x') \end{cases} \qquad \{1\},$$

kur ' apzīmē transponēto matricu.

Pieņem, ka nosacītu gaidāmo y vērtību ar nosacījumu x (kas ir spēkā, ja x un y kopējais sadalījums ir normāls) kā lineāru funkciju var izteikt šādi:

$$E(y \mid x) = \alpha + B'x \qquad \{2\}.$$

α vektoru un B' matricu izsaka ar {1} vienādojumu sistēmas momentiem. Izmantojot nosacītas matemātiskās cerības īpašību:

$$E\{E(y \mid x)\} = E(y) \qquad \{3\},$$

no {2} vienādojuma iegūst:

$$E(y) = \alpha + B'E(x) \qquad \{4\}$$

jeb

$$\alpha = E(y) - B'E(x) \qquad \{5\}.$$

Reizina {2} ar x':

$$E(y \mid x) \cdot x' = \alpha \cdot x' + B'x \cdot x'.$$

Aprēķinot matemātisko cerību vienādojuma labajai un kreisajai pusei un izmantojot {3} vienādojumu, iegūst:

$$E\{E(y \mid x) \cdot x'\} = E\{E(y \cdot x' \mid x)\} = E(y \cdot x') = \alpha \cdot E(x') + B'[E(x \cdot x')]$$

jeb

$$E(y \cdot x') = \alpha \cdot E(x') + B'[E(x \cdot x')] \qquad \{6\}.$$

Reizinot {4} vienādojumu ar $E(x')$, iegūst:

$$E(y) \cdot E(x') = \alpha \cdot E(x') + B'E(x) \cdot E(x') \qquad \{7\}.$$

Atņemot {6} vienādojumu no {7} vienādojuma un izmantojot {1} sistēmu, iegūst:

$C(y,x) = E(y \cdot x') - E(y) \cdot E(x') = B'(E(x \cdot x') - E(x) \cdot E(x')) = B'D(x)$ {8},

tādējādi iegūst:

$B' = C(y,x)D^{-1}(x)$ {9}.

Ievietojot B' no {9} un α no {5} vienādojuma {2} vienādojumā, iegūst:

$E(y \mid x) = \alpha + B'x = E(y) - B'E(x) + B'x =$

$= E(y) - B'(x - E(x)) = E(y) - C(y,x)\, D^{-1}(x)(x - E(x))$

jeb

$E(y \mid x) = E(y) - C(y,x)\, D^{-1}(x)(x - E(x))$ {10}.

Līdzīgi var atvasināt izteiksmi:

$D(y \mid x) = D(y) - C(y,x)\, D^{-1}(x) \cdot C(x,y)$ {11}.

P.2. Kalmana filtrs

(n x 1) dimensiju vektora y_t stāvokļu telpas dinamikas attēlojumu var definēt ar šādu vienādojumu sistēmu:

$y_t = c_t + Z_t\alpha_t + \varepsilon_t$ {12},

$\alpha_{t+1} = d_t + T_t\alpha_t + v_{t+1}$ {13},

kur:
α_t – nenovērojamu mainīgo (m x 1) dimensiju vektors;
c_t, d_t, Z_t, T_t – attiecīgo dimensiju vektori un matricas;
ε_t, v_t – Gausa gadījuma vektori ar nulles vidējo.

{12} vienādojumu bieži sauc par signāla jeb novērojuma vienādojumu, bet {13} vienādojumu – par stāvokļa jeb pārejas vienādojumu.

Gadījuma vektori ε_t un v_t tiek uzskatīti par laikā sērijveida nekorelētiem vektoriem ar šādu kovariācijas matricu:

$$\Omega_t = \mathrm{var}\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_t & G_t \\ G'_t & Q_t \end{bmatrix} \quad \{14\}.$$

Pieņem, ka ε_t un v_t vektori ir vektoru baltie trokšņi, t.i.,

$$E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon'_\tau) = \begin{cases} H, t = \tau \\ 0, t \neq \tau \end{cases}, \; E(\nu_t \cdot \nu'_\tau) = \begin{cases} Q, t = \tau \\ 0, t \neq \tau \end{cases} \quad \{15\},$$

kur H un Q ir attiecīgi (n x n) un (m x m) dimensiju simetriskas matricas.

Pieņem arī, ka ε_t un v_t nekorelē visām novēlošanām:

$$E(\varepsilon_t \cdot v'_\tau) = 0 \quad \forall \ t, \tau \qquad \{16\}.$$

Kalmana filtru izmanto, lai optimāli novērtētu nenovērojamu mainīgo vektoru α_t un atjaunotu šos novērtējumus, kad novērojamo mainīgo jaunās vērtības kļūs pieejamas. Līdztekus tam iegūst optimālās prognozes endogēnam mainīgajam y_t.

Pieņem, ka jāaprēķina $\alpha_{t|t}$ – optimālais novērtējums (ar minimālu vidējo kļūdu kvadrātu) α_t, izmantojot pieejamo informāciju līdz periodam t, un $\Omega_{t|t}$ – kļūdu kovariācijas matrica prognozei stāvokļa vienādojumos. Pieņem arī, ka zināmi c un d vektori un Z un T matricas.

Kalmana filtra rekurentais *(recurrent)* algoritms ietver šādus soļus.

1. Sākumstāvokļa izvēle.
Ar $\alpha_{1|0}$ apzīmē α_1 prognozēto vērtību, kas pamatojas uz y_0 sākuma vērtību. Ja visas T matricas īpašvērtības pēc absolūtās vērtības ir mazākas par 1, pieņem, ka $\alpha_{1|0} = E(\alpha_1)$, t.i., procesa beznosacījumu vidējā vērtība.

Pieņem, ka $\Omega_{1|0}$ apmierina šo vienādojumu:

$$\Omega_{1|0} = T' \cdot \Omega_{1|0} T' + Q \qquad \{17\},$$

kas atbilst procesa beznosacījumu kovariācijas matricai.

Ja dažas no T matricas īpašvērtībām ir lielākas par *1* vai vienādas ar *1*, par sākuma vērtībām vairs nav iespējams izvēlēties procesa beznosacījumu vidējo un kovariāciju (jo tie neeksistē), tādējādi, lai varētu izvēlēties, nepieciešami citi apsvērumi.

Zinot sākuma vērtības $\alpha_{1|0}$ un $\Omega_{1|0}$, nākamais procedūras solis ir aprēķināt $\alpha_{2|1}$ un $\Omega_{2|1}$ nākamajam periodam. Tā kā visi aprēķini periodiem $t = 2, 3, ..., T$ tiek veikti analoģiski, aplūko pārejas aprēķinu algoritmu jebkuram periodam t no vērtībām $\alpha_{t|t-1}$, $\Omega_{t|t-1}$ līdz vērtībām $\alpha_{t+1|t}$, $\Omega_{t+1|t}$.

2. Y_t prognoze un šīs prognozes kovariācijas matricas izveidošana.

$$\hat{y}_{t|t-1} = c + Z\alpha_{t|t-1} \qquad \{18\},$$

$$E(y_t - \hat{y}_{t|t-1})(y_t - \hat{y}_{t|t-1})' = E(Z(\alpha_t - \alpha_{t|t-1})(\alpha_t - \alpha_{t|t-1})Z' + H =$$
$$= Z\Omega_{t|t-1}Z' + H = \sum\nolimits_{t|t-1} \qquad \{19\}.$$

3. Pieņem, ka periodā t kļūst zināma y_t vērtība. Izmantojot šo informāciju, var koriģēt pētījuma autoru prognozi $\alpha_t - \alpha_{t|t-1}$.

Ar Y_{t-1} apzīmē vektoru $(y_0, y_1, ..., y_{t-1})'$. Tādējādi no {12} vienādojuma iegūst:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(\alpha_t, y_t \,|\, Y_{t-1}) = \mathrm{cov}(\alpha_t, Z\cdot\alpha_t \,|\, Y_{t-1}) = \\
&= E((\alpha_t - \alpha_{t|t-1})(\alpha_t - \alpha_{t|t-1})' Z' \,|\, Y_{t-1}) = \Omega_{t|t-1} Z', \\
&D(y_t \,|\, Y_{t-1}) = D(c + Z\alpha_t + \varepsilon_t \,|\, Y_{t-1}) = Z'\Omega_{t|t-1} Z + H, \\
&E(\alpha_t \,|\, Y_{t-1}) = \alpha_{t|t-1}.
\end{aligned}$$

Izmantojot {10} vienādojumu (ievietojot y vietā α_t, x vietā y_t, aizvietojot beznosacījumu matemātisko cerību ar vienādojumu $E(\cdot \mid Y_{t-1})$), iegūst $\alpha_{t|t}$ koriģēto vērtību:

$$\hat{\alpha}_{t|t} = \hat{\alpha}_{t|t-1} + \{E[(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t-1})(y_t - \hat{y}_{t|t-1})']\}\cdot\{E[(y_t - \hat{y}_{t|t-1})(y_t - \hat{y}_{t|t-1})']\}^{-1}(y_t - \hat{y}_{t|t-1}) \qquad \{20\},$$

bet

$$\begin{aligned}
&E[(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t-1})(y_t - \hat{y}_{t|t-1})'] = E[(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t-1})((\alpha_t - \alpha_{t|t-1})' Z' + \varepsilon_t)] = \\
&= E[(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t-1})(\alpha_t - \alpha_{t|t-1})'] Z' = \Omega_{t|t-1}\cdot Z' \qquad \{21\}.
\end{aligned}$$

Izmanto nosacījumu, ka ε_t nekorelē ar citiem locekļiem.
Ievietojot {19} vienādojumu {20} vienādojumā, iegūst:

$$\hat{\alpha}_{t|t} = \hat{\alpha}_{t|t-1} + \Omega_{t|t-1}\cdot Z'(Z\cdot\Omega_{t|t-1}Z' + H)^{-1}(y_t - c - Z\alpha_{t|t-1}) \qquad \{22\}.$$

No {11} vienādojuma iegūst kovariācijas matricu ar koriģēto prognozi saistāmām kļūdām:

$$\begin{aligned}
&\Omega_{t|t} = E[(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t})(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t})'] = \\
&= E[(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t-1})(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t-1})'] - \{E[(\alpha_t - \alpha_{t|t-1})(y_t - y_{t|t-1})']\}\cdot \\
&\cdot\{E[(y_t - y_{t|t-1})(y_t - y_{t|t-1})']\}^{-1}\cdot\{E[(y_t - y_{t|t-1})(\alpha_t - \alpha_{t|t-1})']\} = \\
&= \Omega_{t|t-1} - \Omega_{t|t-1} Z'(Z\cdot\Omega_{t|t-1}\cdot Z' + H)^{-1} Z\cdot\Omega'_{t|t-1} \qquad \{23\}.
\end{aligned}$$

Atšķirību starp $\alpha_{t|t}$ koriģēto vērtību un iepriekš prognozēto vērtību $\alpha_{t|t-1}$ līdz informācijas saņemšanai par y_t izsaka izteiksme
$\Omega_{t|t-1}\cdot Z'(Z\cdot\Omega_{t|t-1}Z' + H)^{-1}(y_t - c - Z\alpha_{t|t-1})$.
Tāpēc, jo lielāka vērtība izteiksmei $y_t - c - Z\alpha_{t|t-1} = y_t - y_{t|t-1}$, t.i., starpībai starp y_t īstenoto vērtību un prognozēto vērtību, jo lielāka ir korekcija ($\alpha_{t|t} - \alpha_{t|t-1}$), taču dotais lielums ir apgriezti proporcionāls prognozes precizitātei, kas atbilst $\sum_{t|t-1} = Z\Omega_{t|t-1}Z' + H$, un tieši proporcionāls kovariācijai starp α_t un y_t – $\Omega_{t|t-1}Z'$. Tātad, jo mazāk precīza ir prognoze $y_{t|t-1}$, jo mazāka ir korekcijas locekļa vērtība {23} vienādojumā, un, jo lielāka ir nosacītā kovariācija starp α_t un y_t, jo šis loceklis ir lielāks.

4. No {13} vienādojuma iegūst šādu stāvokļa mainīgo prognozi nākamajam periodam:

$$\alpha_{t+1|t} = E(\alpha_{t+1}|Y_t) = E(d + T\cdot\alpha_t + v_{t+1}|Y_t) = d + T\cdot E(\alpha_t|Y_t) + E(v_{t+1}|Y_t) = d + T\cdot\alpha_{t|t} \qquad \{24\}.$$

Ievietojot {22} vienādojumu {24}vienādojumā, iegūst:

$$\alpha_{t+1|t} = d + T\alpha_{t|t-1} + T\Omega_{t|t-1}\cdot Z'(Z\cdot\Omega_{t|t-1}\cdot Z' + H)^{-1}(y_t - c - Z\alpha_{t|t-1}) \qquad \{25\}.$$

Matricu

$$k_t = T\Omega_{t|t-1}\cdot Z'(Z\cdot\Omega_{t|t-1}\cdot Z' + H)^{-1} \qquad \{26\}$$

sauc par ieguvumu matricu *(gain matrix)*, tādējādi {25} vienādojumu var pārrakstīt šādi:

$$\alpha_{t+1|t} = d + T\alpha_{t|t-1} + k\cdot(y_t - c - Z\alpha_{t|t-1}) \qquad \{27\}.$$

Šīs prognozes kļūdu kovariācijas matricu var aprēķināt, izmantojot {13} un {24} vienādojumu:

$$\begin{aligned}\alpha_{t+1|t} &= E[(\alpha_{t+1} - \alpha_{t+1|t})(\alpha_{t+1} - \alpha_{t+1|t})'] = \\ &= E[(d + T\cdot\alpha_t + v_{t+1} - d - T\cdot\alpha_{t|t})(d + T\cdot\alpha_t + v_{t+1} - d - T\cdot\alpha_{t|t})'] = \\ &= T\cdot E[(\alpha_t - \alpha_{t|t})(\alpha_t - \alpha_{t|t})']T' + E(v_{t+1}v'_{t+1}) = T\cdot\Omega_{t|t}\cdot T' + Q_t \qquad \{28\}.\end{aligned}$$

Ievietojot {23} vienādojumu {28}vienādojumā, iegūst:

$$\Omega_{t+1|t} = T\cdot[\Omega_{t|t-1} - \Omega_{t|t-1}\cdot Z'(Z\cdot\Omega_{t|t-1}\cdot Z' + H)^{-1}Z\cdot\Omega'_{t|t-1}]\cdot T' + Q_t \qquad \{29\}.$$

P.3. Kalmana filtra lietojums *n* periodu horizonta prognozēm

No {13} vienādojuma, izmantojot rekursīvo ievietošanu, iegūst:

$$\alpha_{t+n} = T^n\alpha_t + T^{n-1}v_{t+1} + T^{n-2}v_{t+2} + \ldots + T^1 v_{t+n-1} + v_{t+n}, \text{ kur } n = 1, 2, 3\ldots \qquad \{30\}.$$

Projicējot α_{t+n} uz α_t un Y_t, iegūst:

$$E(\alpha_{t+n}|\alpha_t, Y_t) = T^n\alpha_t\,.$$

Izmantojot nosacītas matemātiskās cerības īpašību, iegūst:

$$\alpha_{t+n|t} = E(\alpha_{t+n}|Y_t) = E[E(\alpha_{t+n}|\alpha_t, Y_t)|Y_t] = E(T^n\alpha_t|Y_t) = T^n E(\alpha_t|Y_t) = T^n\alpha_{t|t} \qquad \{31\}.$$

No izteiksmju {30} un {31} *n* nākamo periodu prognozes vienādojumiem iegūst:

$$\alpha_{t+n} - \alpha_{t+n|t} = T^n(\alpha_t - \alpha_{t|t}) + T^{n-1}v_{t+1} + T^{n-2}v_{t+2} + ... + T^1 v_{t+n-1} + v_{t+n} \quad \{32\}.$$

Kļūdu kovariācijas matrica:

$$\Omega_{t+n|t} = T^n \cdot \Omega_{t|t}(T')^n + T^{n-1}Q(T')^{n-1} + T^{n-2}Q(T')^{n-2} + ... + TQT' + Q \quad \{33\}.$$

No {12} vienādojuma iegūst izteiksmi novērojamam vektoram:

$$y_{t+n} = c + Z\alpha_{t+n} + \varepsilon_{t+n}.$$

Tādējādi y prognozi n nākamajiem periodiem var aprēķināt, izmantojot sakarību:

$$y_{t+n|t} = E(y_{t+n}|Y_t) = c + Z\alpha_{t+n|t} \quad \{34\}.$$

Savukārt šīs prognozes kļūdu raksturo sakarība:

$$y_{t+n} - y_{t+n|t} = (c + Z\cdot\alpha_{t+n} + \varepsilon_{t+n}) - (c + Z\cdot\alpha_{t+n|t}) = Z(\alpha_{t+n} - \alpha_{t+n|t}) + \varepsilon_{t+n}.$$

Šīs kļūdas kovariācijas matrica ir šāda:

$$E[(y_{t+n} - y_{t+n|t})(y_{t+n} - y_{t+n|t})'] = Z\cdot\Omega_{t+n|t}\cdot Z' + H.$$

P.4. Kalmana filtra lietojums modeļa parametru novērtēšanai

Ja α_1 sākotnējais stāvoklis un gadījuma vektori (ε_t, v_t) ir Gausa veida, tad y_t sadalījums ar nosacījumu Y_{t-1} ir arī Gausa veida ar vidējo:

$$y_{t|t-1} = c + Z\cdot\alpha_{t|t-1}$$

un kļūdu matricu:

$$\sum\nolimits_{t|t-1} = Z\cdot\Omega_{t|t-1}\cdot Z' + H.$$

Šāda sadalījuma blīvumu raksturo

$$f(y_t|Y_{t-1}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left|Z\cdot\Omega_{t|t-1}\cdot Z' + H\right|^{-\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\exp\{-\frac{1}{2}(y_t - c - Z\cdot\alpha_{t|t-1})'(Z\cdot\Omega_{t|t-1}\cdot Z' + H)^{-1}(y_t - c - Z\cdot\alpha_{t|t+1}) \quad \{35\},$$

kur t = 1, 2, ..., T.

Ar $f(y_1, ..., y_T)$ apzīmē vektora $(y_1, ..., y_T)$ kopējo blīvumu. Ņemot vērā kopējā blīvuma īpašību, to var attēlot šādi:

$$f(y_1, ..., y_T) = f(y_T | y_{T-1}, ..., y_1) f(y_{T-1}, ..., y_1) =$$
$$= f(y_T | y_{T-1}, ..., y_1) f(y_{T-1} | y_{T-2}, ..., y_1) = ... = \prod_{j=0}^{T-2} f(y_{T-j} | y_{T-j-1}, ..., y_1) \qquad \{36\}.$$

Logaritmējot {33} vienādojumu un izmantojot {32} vienādojumu, iegūst ticamības funkciju:

$$L(y_1, ..., y_T | \varphi) = -\frac{Tn}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \log \left| \sum{}_{t|t-1} \right| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} [(y_T - y_{t|t-1}) \sum{}_{t|t-1}^{-1} (y_t - y_{t|t-1})] \qquad \{37\},$$

kur:

φ – parametru vektors,

$y_t - y_{t|t-1} \sim N(0, \sum_{t|t-1})$, $y_1 \sim N(\overline{y}, \sum_{1|0})$,

kur $\overline{y}$ – procesa beznosacījumu vidējais.

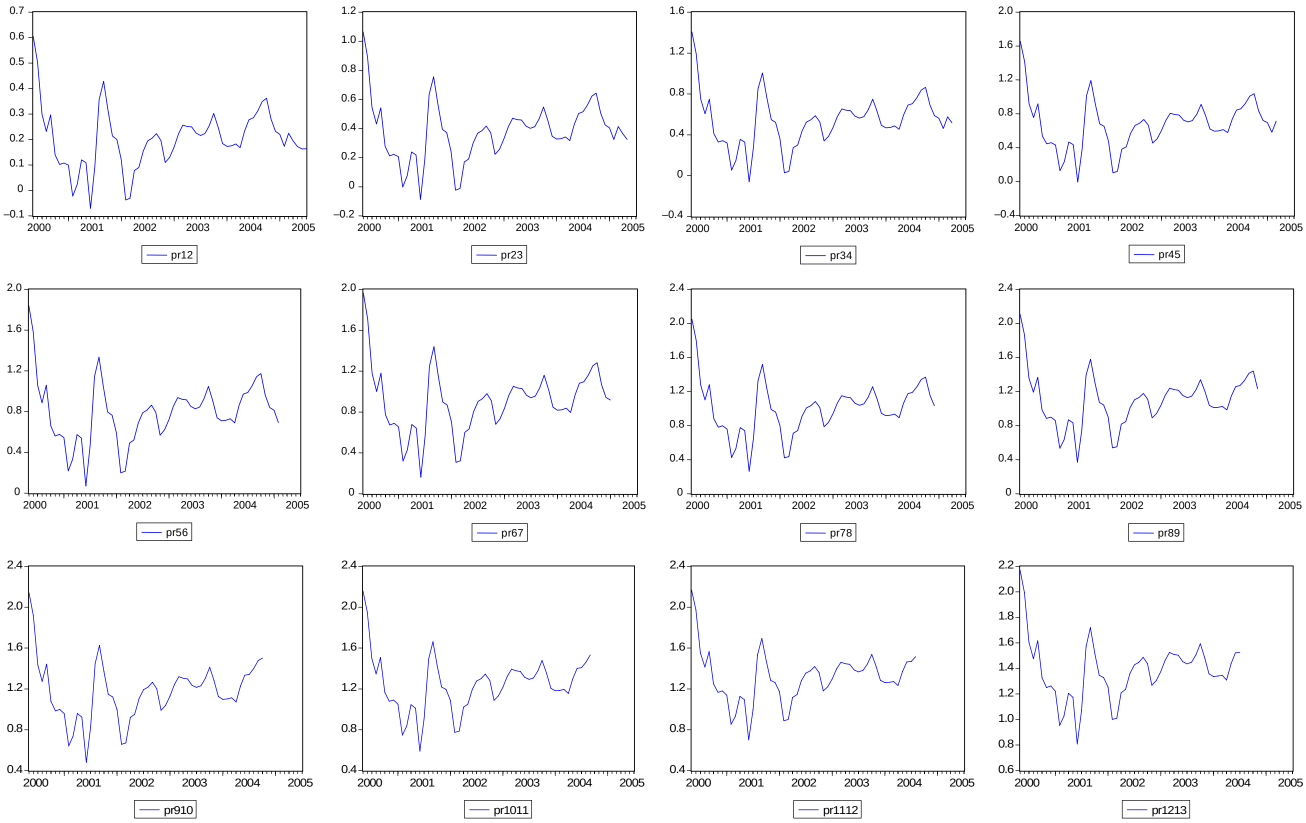
P.5. Modeļa parametru aprēķināšanas algoritms

1. Izvēlas parametru sākuma vektoru φ_0.
2. Veic Kalmana filtra rekurentā algoritma 1.–4. soli (sk. P.2.).
3. Katrā solī aprēķina $y_t - y_{t|t-1}$ un $\sum_{t|t-1}$, kuri ietilpst {35}vienādojuma ticamības funkcijas veidošanā.
4. Ar kādu no skaitļošanas metodēm aprēķina parametru vektora φ_i jauno vērtību, kas palielina L {37} vienādojumā.
5. Kalmana filtra rekurentā algoritma 2.–4. soli (sk. P.2.) atkārto tik ilgi, kamēr $\left|\varphi^i - \varphi^{i-1}\right| \leq \delta$ un $\frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} < \delta$, kur δ vērtība ir pietiekami maza**.**

2. pielikums

Dažādu prognozes horizontu 1 mēneša procentu likmes riska prēmijas dinamika

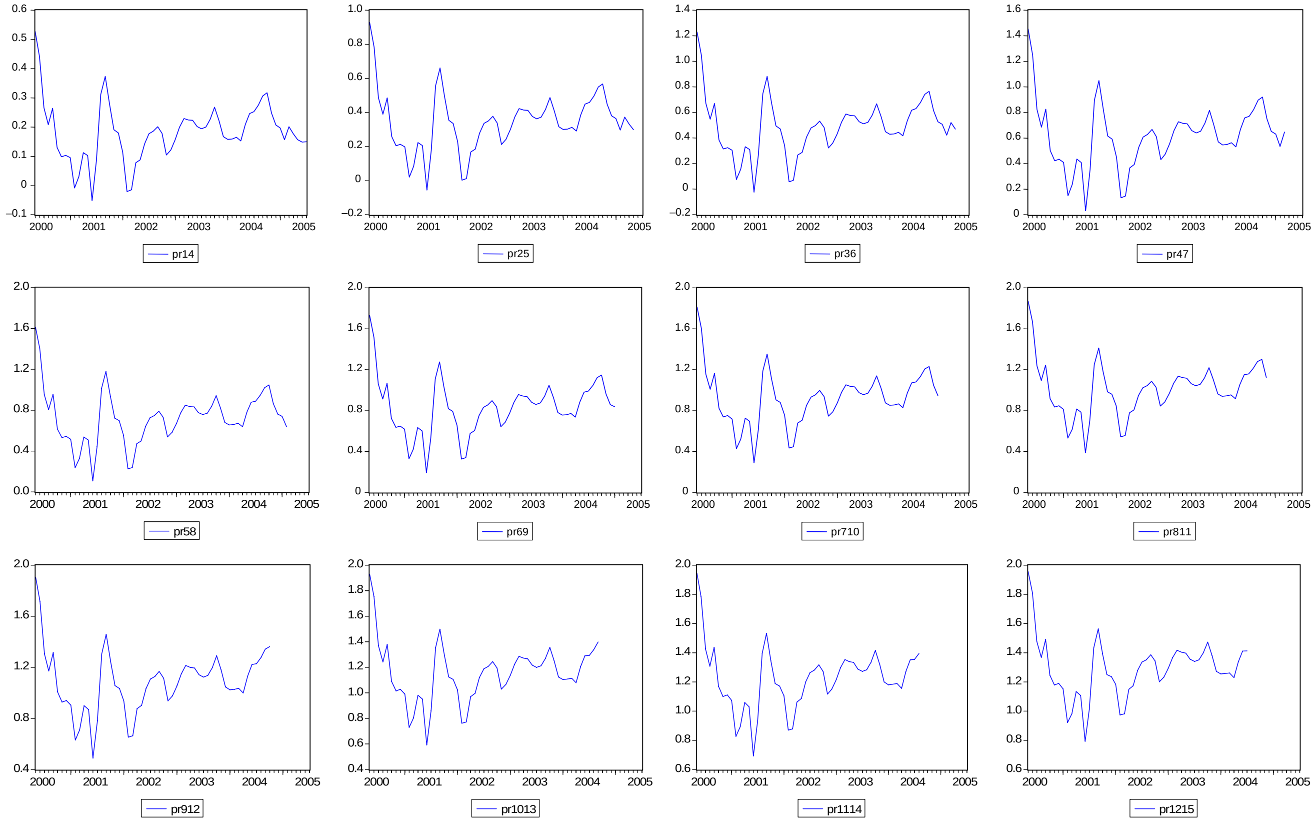
(pr*ij* – prēmija *i* prognozes horizontam (mēnešos) ar *j* samaksas periodu (mēnešos); %)



3. pielikums

Dažādu prognozes horizontu 3 mēnešu procentu likmes riska prēmijas dinamika

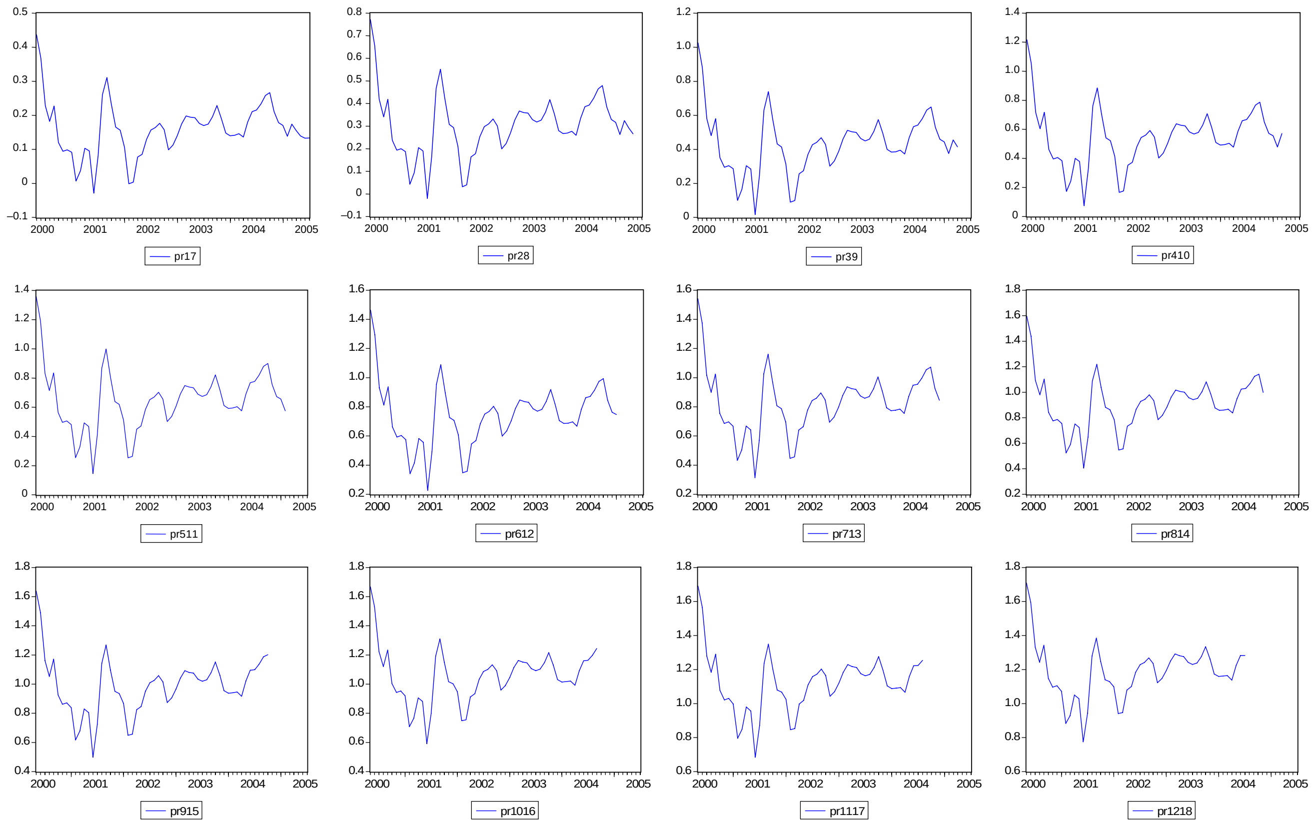
(pr*ij* – prēmija *i* prognozes horizontam (mēnešos) ar *j* samaksas periodu (mēnešos); %)



4. pielikums

Dažādu prognozes horizontu 6 mēnešu procentu likmes riska prēmijas dinamika

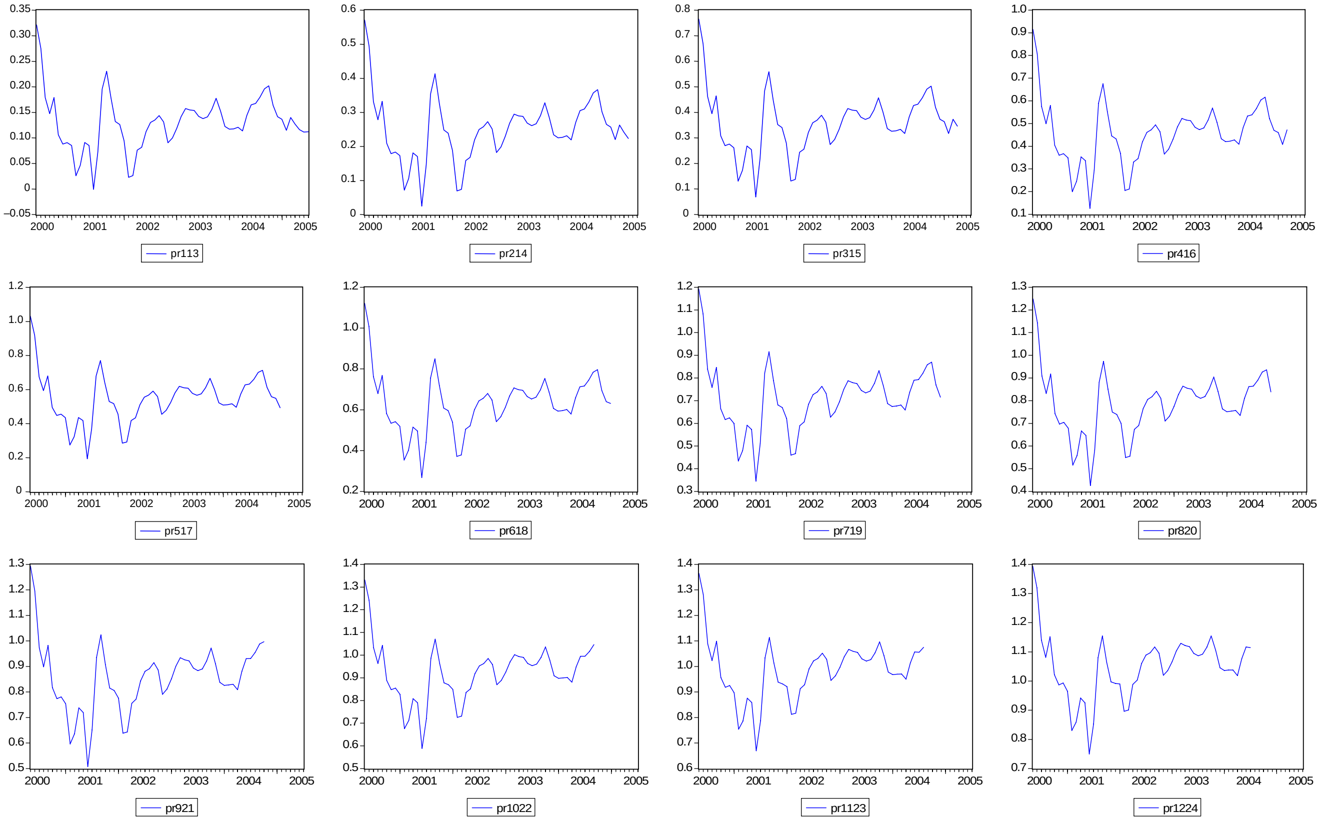
(pr*ij* – prēmija *i* prognozes horizontam (mēnešos) ar *j* samaksas periodu (mēnešos); %)



5. pielikums

Dažādu prognozes horizontu 12 mēnešu procentu likmes riska prēmijas dinamika

(pr*ij* – prēmija *i* prognozes horizontam (mēnešos) ar *j* samaksas periodu (mēnešos); %)



6. pielikums

Procentu likmju vidējās prēmijas un standartnovirzes

(pr*ij* – prēmija *i* prognozes horizontam (mēnešos) ar *j* samaksas periodu (mēnešos); %)

1 mēneša procentu likme

	pr12	pr23	pr34	pr45	pr56	pr67	pr78	pr89	pr910	pr1011	pr1112	pr1213
Vidējā prēmija	0.193629	0.364347	0.515686	0.650680	0.771919	0.881606	0.981610	1.073508	1.158631	1.238101	1.312857	1.383688
Standart-novirze	0.124962	0.211080	0.267350	0.300950	0.317572	0.321701	0.316850	0.305745	0.290489	0.272687	0.253551	0.233989

3 mēnešu procentu likme

	pr14	pr25	pr36	pr47	pr58	pr69	pr710	pr811	pr912	pr1013	pr1114	pr1215
Vidējā prēmija	0.175572	0.331301	0.470243	0.595022	0.707878	0.810715	0.905146	0.992536	1.074034	1.150609	1.223071	1.292104
Standart-novirze	0.106270	0.179455	0.227233	0.255724	0.269783	0.273233	0.269068	0.259613	0.246660	0.231579	0.215408	0.198923

6 mēnešu procentu likme

	pr17	pr28	pr39	pr410	pr511	pr612	pr713	pr814	pr915	pr1016	pr1117	pr1218
Vidējā prēmija	0.154646	0.293008	0.417591	0.530540	0.633689	0.728594	0.816575	0.898746	0.976048	1.049272	1.119081	1.186033
Standart-novirze	0.084945	0.143384	0.181485	0.204165	0.215318	0.218016	0.214659	0.207116	0.196827	0.184895	0.172159	0.159248

12 mēnešu procentu likme

	pr113	pr214	pr315	pr416	pr517	pr618	pr719	pr820	pr921	pr1022	pr1123	pr1224
Vidējā prēmija	0.127464	0.243277	0.349219	0.446817	0.537372	0.621988	0.701603	0.777008	0.848869	0.917749	0.984119	1.048375
Standart-novirze	0.057915	0.097684	0.123556	0.138914	0.146443	0.148255	0.146006	0.140985	0.134193	0.126398	0.118191	0.110020

LITERATŪRA

1. ANG, Andrew, PIAZZESI, Monika. A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables. *Journal of Monetary Economics*, vol. 50, issue 4, May 2003, pp. 745–787.

2. CASSOLA, Nuno, LUÍS, Barros Jorge. *A Two-factor Model of the German Term Structure of Interest Rates.* ECB Working Paper, No. 46, March 2001.

3. CORTAZAR, Gonzalo, SCHWARTZ, Eduardo S., NARANJO, Lorenzo. *Term Structure Estimation in Low-Frequency Transaction Markets: A Kalman Filter Approach with Incomplete Panel-Data.* The Anderson School at UCLA Finance Working Paper, No. 6-03, 2003.

4. DIEBOLD, Francis X., LI, Canlin. *Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields.* NBER Working Paper, No. 10048, 2003.

5. DIEBOLD, Francis X., PIAZZESI, Monika, RUDEBUSCH, Glenn D. *Modeling Bond Yields in Finance and Macroeconomics*. NBER Working Paper, No. 11089, 2005.

6. DIEBOLD, Francis X., RUDEBUSCH, Glenn D., ARUOBA, Boragan S. *The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach.* NBER Working Paper, No. 10616, July 2004.

7. DUFFEE, Gregory R. Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models. *Journal of Finance*, vol. 57, No. 1, February 2002, pp. 405–443.

8. DURRÉ, Alain, EVJEN, Snorre, PILEGAARD, Rasmus. *Estimating Risk Premia in Money Market Rates.* ECB Working Paper, No. 221, 2003.

9. EVANS, Charles L., MARSHALL, David. *Monetary Policy and the Term Structure of Nominal Interest Rates: Evidence and Theory*. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, vol. 49, 1998, pp. 53–111.

10. EVANS, Charles L., MARSHALL, David. *Economic Determinants of the Nominal Treasury Yield Curve.* Federal Reserve Bank of Chicago Working Papers, No. 16, 2001.

11. FRANKEL, Jeffrey Alexander, LOWN, Cara S. An Indicator of Future Inflation Extracted from the Steepness of the Interest Rate Yield Curve along its Entire Length. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 109, 1994, pp. 517–530.

12. GRAVELLE, Toni, MULLER, Philippe, STRÉLISKI, David. Towards a New Measure of Interest Rate Expectations in Canada: Estimating a Time-Varying Term Premium. Bank of Canada. Proceedings of a Conference *Information in Financial Asset Prices*, May 1998.

13. HAMILTON, James D. Time Series Analysis. *Princeton University Press*, 1994.

14. KENDALL, Maurice G., STUART, Alan. The Advanced Theory of Statistics. London: Griffin, 1968.

15. KNEZ, Peter J., LITTERMAN, Robert, SCHEINKMAN, José. Explorations into Factors Explaining Money Market Returns, *Journal of Finance*, vol. 49, No. 5, December 1994, pp. 1861–1882.

16. LITTERMAN, Robert, SCHEINKMAN, José. Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income*, vol. 1, June 1991, pp. 54–61.

17. NELSON, Charles R., SIEGEL, Andrew F. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, vol. 60, 1987, pp. 473–489.

18. SHILLER, Robert J. The Term Structure of Interest Rates. B. Friedman and F. Hahn (eds) *Handbook of Monetary Economics*, vol. 1. Amsterdam: North-Holland, 1990, pp. 627–722.

19. The Stability-Oriented Monetary Policy Strategy of the Eurosystem. ECB Monthly Bulletin, No. 1, January 1999, pp. 39–50.